MATHÉMATIQUES I
Algèbre et analyse

OPTION ÉCONOMIQUE

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet sera distribuée 1 feuille de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1 (*sur 10 points*)

On donne les matrices : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

et on pose : $A^0 = I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = A^n \cdot A$, $\quad S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$

I. 1° Calculer L.M et M.L.

2° Calculer L^2 et M^2. En déduire L^n et M^n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

3° En remarquant que $A = L - M$, démontrer que $A^n = 3^{n-1} . L - (-3)^{n-1} . M$. $n \in \mathbb{N}^*$.

4° Exprimer S_n en fonction de I, L, M et n.

5° On pose $S = I - A$

a. Démontrer que S est inversible et calculer S^{-1}

b. En déduire que : $S_n = S^{-1} . (I - A^n)$

II. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} x_n = \lambda x_{n-1} + \alpha n^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$

où λ est un réel différent de 1 et α un réel non nul.

1° Démontrer qu'il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est un polynôme de degré 2 vérifiant :

$$Q_n = \lambda Q_{n-1} + \alpha n^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

(On posera $Q_n = an^2 + bn + c$ et on déterminera a, b et c en fonction de λ et α).

2° On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : y_n = x_n - Q_n$

Démontrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

En déduire l'expression de y_n, puis de x_n en fonction de n, λ, α et x_0.

III. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant trois suites de nombres réels, on pose pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \omega_n \end{pmatrix}$

On considère alors l'équation matricielle : $\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = A X_{n-1} + B$

où A est la matrice carrée d'ordre 3 définie au début du problème et $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ une matrice-colonne donnée.

1° On pose $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : X_n = A^n X_0 + S_n B$

En déduire, en utilisant les résultats du I, les expressions de u_n, v_n et ω_n en fonction de n.

Tournez la page S.V.P.

b. Déterminer le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels définie par : $\begin{cases} x_n = a\,x_{n-1} + b, & n \in \mathbf{N}^* \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$

où $a \in \mathbf{R} - \{1\}$ et $b \in \mathbf{R}$

Cette formule est-elle comparable à celle obtenue précédemment ?

2° On pose : $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2n^2 \\ n^2 \\ -2n^2 \end{pmatrix}$ et on considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N} : \begin{cases} a_n = u_n + v_n + \omega_n \\ b_n = 2u_n - v_n - \omega_n \\ c_n = u_n - 2v_n + \omega_n \end{cases}$$ où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont les trois suites définies au début du III.

a. Démontrer que $a_n = n^2$, $n \in \mathbf{N}$

b. Établir une relation de récurrence entre b_n et b_{n-1}.

En déduire, en utilisant les résultats du II, l'expression de b_n en fonction de n.

c. Établir de même une relation de récurrence entre c_n et c_{n-1}. En déduire l'expression de c_n en fonction de n.

d. En déduire l'expression de u_n, v_n et ω_n en fonction de n.

PROBLÈME 2 (*sur 10 points*)

I. On considère la fonction : $h :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

1° Étudier les variations de h.

2° Étudier les branches infinies de (C) courbe représentative de h.

3° *a.* n n'étant un entier supérieur ou égal à 2, justifier l'existence et l'unicité d'un réel δ_n appartenant à $]0, 1[$ tel que : $h(\delta_n) = h(n)$

b. Déterminer les entiers naturels p et q tels que : $\dfrac{p}{100} \leqslant \delta_2 < \dfrac{p+1}{100}$ $\dfrac{q}{100} \leqslant \delta_3 < \dfrac{q+1}{100}$

II. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction : $g_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto (n - x)e^x - n$

1° Étudier les variations de g_n.

2° *a.* En déduire l'existence d'un unique réel α_n vérifiant : $\alpha_n > 0$, $g_n(\alpha_n) = 0$

b. Démontrer que : $n - 1 < \alpha_n < n$

c. On pose alors $\alpha_n = n - \delta_n$ avec $\delta_n \in]0, 1[$
Vérifier que : $h(\delta_n) = h(n)$ où h est la fonction étudiée au I.

En déduire à 10^{-2} près la valeur de α_2 et α_3

d. Trouver alors le signe de $g_n(x)$, $x \in \mathbf{R}^+$

III. n désignant toujours un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n.

A. 1° Étudier la continuité de f_n

2° Étudier la dérivabilité de f_n. Préciser la tangente à (C_n) à l'origine.

3° Déterminer la nature des branches infinies de (C_n)

4° Étudier les variations de f_n. On démontrera que :

$\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(e^x - 1)^2} \cdot g_n(x)$, où g_n désigne la fonction étudiée au II.

Démontrer que $f_n(\alpha_n) = (n - \alpha_n)\,\alpha_n^{n-1}$

Tournez la page S.V.P.

5° Étudier pour $m > n$ la position relative de (C_m) et (C_n)

6° Construire les courbes (C_2) et (C_3) dans un repère orthogonal du plan (unité en abscisses : 2 cm - unité en ordonnées : 10 cm).

B. 1° Justifier l'existence de la fonction F définie pour $x \geq a$ par : $F(x) = \int_a^x f_2(t)\,dt$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$

2° Démontrer que F est strictement croissante.

3° *a.* Démontrer que pour tout $t \geq a$ on a : $\dfrac{1}{e^t - 1} \leq \dfrac{1}{e^a - 1}$

b. Calculer l'intégrale : $\int_a^x t^2 e^{-t}\,dt$

c. En remarquant que : $\dfrac{1}{e^t - 1} = e^{-t}\left(1 + \dfrac{1}{e^t - 1}\right)$ déduire que : $F(x) \leq \dfrac{a^2 + 2a + 2}{e^a - 1}$

d. Prouver alors que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f_2(t)\,dt$ est convergente.

e. En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} f_2(t)\,dt$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail